Θέματα Επιχειρησιακών ερευνών — 19/11/18 (1)

Θεωρία χρησιμότητας

κατάσταση r_i, $i=1,\dots n$ με πιθανότητα p_i

λοταρία $(p_1 r_1, p_2 r_2, \dots p_n r_n)$

$(\frac{1}{4}, 500, \frac{3}{4}, 0)$

L_1 — 500
L_2 — 0

L_1, L_2

$\downarrow$

1000

1/2 — 30.000
1/2 — 0

Προσπαθούμε να φτιάξουμε μια μεθοδολογία για τον τρόπο που θα κατατάσσουμε τις λοταρίες. Μας ενδιαφέρει να δούμε πως αντιδρούν διάφορα άτομα στον τρόπο επιλογής.

$L_1 P L_2$ προτιμάει την L_1 από την L_2

$L_1 i L_2$ είναι αδιάφορο για το ποια λοταρία θα επιλέξει

Θέλω να τις κοιτάξω να δω ποιες προτιμάνε:

$L_1 \xrightarrow{1} 10.000$ $\quad$ L_2: $\xrightarrow{0,5} 30.000$, $\xrightarrow{0,5} 0$ $\quad$ L_4: $\xrightarrow{0,02} -10.000$, $\xrightarrow{0,08} 500$

$L_3 \longrightarrow 0$

$r_1 = 10.000$

$\longrightarrow 10.000$: $\xrightarrow{0,9} 30.000$, $\xrightarrow{0,1}$

Τις πιθανότητες δεν τις ξέραμε εξ' αρχής αυτός που παίζει τις ορίζει. Δηλαδή, για να αφήσει τις σίγουρες 10.000 τι πιθανότητα χρειάζεται για να παίξει

$r_2 = 500$

$\rightarrow 500$: 0,02 — 30.000, 0,98 — -10.000

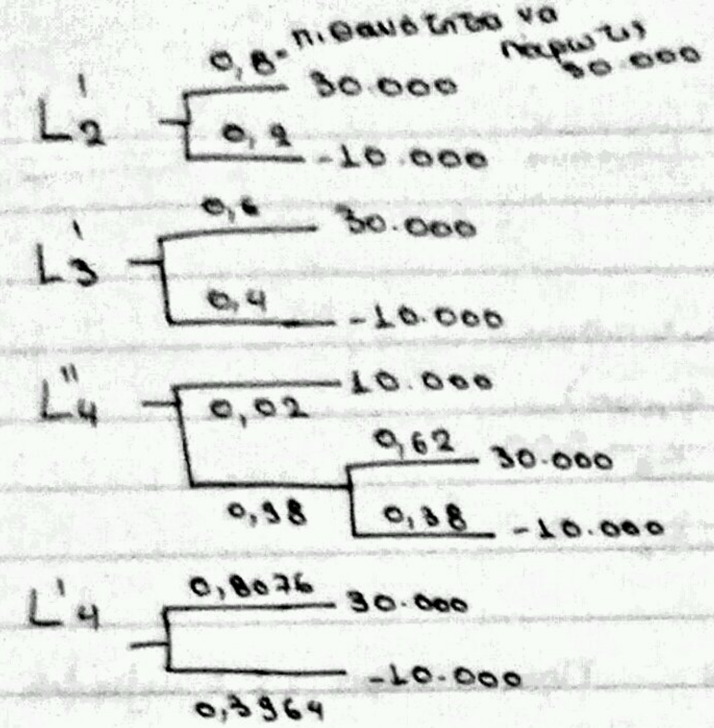
$r_3 = 0$

$\rightarrow 0$: 0,6 — 30.000, 0,4 — -10.000

Σχόλιο:

L_1: 0,9 — 30.000, 0,1 — -10.000

L_2: 0,5 — 30.000, 0,5 — (0,6 — 30.000, 0,4 — -10.000)

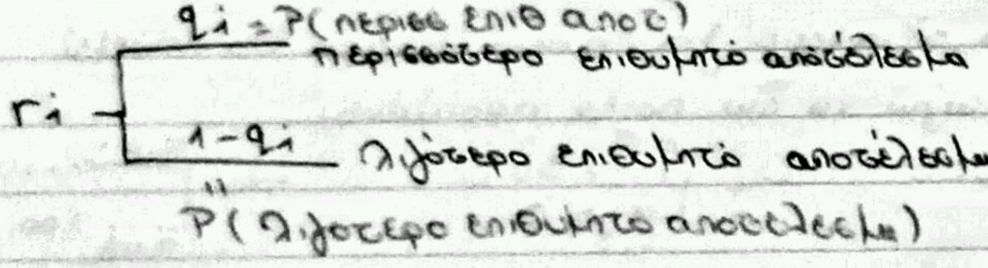


κατάταξη

$L_1 \rho L_2 \rho L_4 \rho L_3$

<u>Μια πιο αυστηρή περιγραφή</u>

Η χρησιμότητα της απολαβής r_i, $u(r_i)$ είναι ένας αριθμός q_i τω ο decision maker είναι αδιάφορος μεταξύ των λοταριών



<u>Άρα στο παράδειγμά μας</u>

$u(30.000)=1$ $\quad$ $u(10.000)=0,9$ $\quad$ $u(0)=0,6$

$u(-10.000)=0$ $\quad$ $u(500)=0,62$

Για κάθε λοταρία $L=(p_1 r_1, \dots p_n r_n)$

Η αναμενόμενη χρησιμότητα γράφεται:

$$E(U \text{ για } L) = \sum_{i=1}^{n} p_i u(r_i)$$

$E(U \text{ για } L_1) = 1 * 0,9 = 0,9$

$E(U \text{ για } L_2) = 1 * 0,5 + 0,6 * 0,6 = 0,8$

$E(U \text{ για } L_3) = 1 * 0,6$

$E(U \text{ για } L_4) = 0,02 * \quad + 0,98 * 0,62 = 0,6076$

προτιμώ την L_1 από την L_2, δηλ $L_1 \rho L_2$ αν-ν $E(u \text{ για } L_1) > E(u \text{ για } 2)$, $L_2 \rho L_1$ αν-ν $E(u \text{ για } L_2) > E(u \text{ για } L_1)$

Είμαστε αδιάφοροι L_1 ή L_2 αν-ν $E(u \text{ για } L_1) = E(u \text{ για } L_2)$

▸ Von Neuman Morgengten Αξιώματα

1] (κριτήριο πλήρης διαταξης)

Για δύο οποιεσδήποτε απολαβές ένα από τα ακόλουθα αληθεύει ο decision maker

1) προτιμά το r_1 από το r_2
2) r_2 από r_1
3) είναι αδιάφορο

2] (αξίωμα συνέχειας)

Αν decision maker προτιμά το r_1 από το r_2 ή το r_2 από το r_3, τότε για κάποιο c, $0<c<1$ L_1 ή L_2

$$L_1 \longrightarrow r_2 \quad \begin{cases} c & r_1 \\ 1-c & r_3 \end{cases}$$

$$L_3 \longrightarrow 0 \quad \begin{cases} & 30.000 \\ & -10.000 \end{cases}$$

3] (αξίωμα ανεξαρτησίας)

Υποθέτουμε ότι αυτός που αποφασίζει είναι αδιάφορος μεταξύ r_1, r_2 και έστω r_3 οποιαδήποτε άλλη απολαβή, τότε για οποιαδήποτε c, $0<c<1$ L_1 ή L_2

$$L_1 \begin{cases} c & r_1 \\ 1-c & r_3 \end{cases} \qquad L_2 \begin{cases} c & r_2 \\ 1-c & r_3 \end{cases}$$

Είμαστε αδιάφοροι ανάμεσα στο r_1, r_2

4] (άνισων πιθανοτήτων)

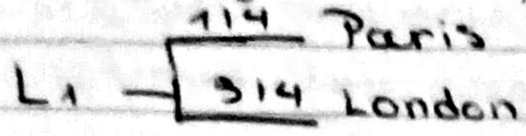
Υποθέτουμε ότι κάποιος προτιμά το r_1, από το r_2. Αν οι δύο λοταρίες έχουν μόνο r_1 ή r_2 ως πιθανά αποτελέσματα τότε κάποιος θα προτιμούσε τη λοταρία με την μεγαλύτερη πιθανότητα να φέρει το r_1.

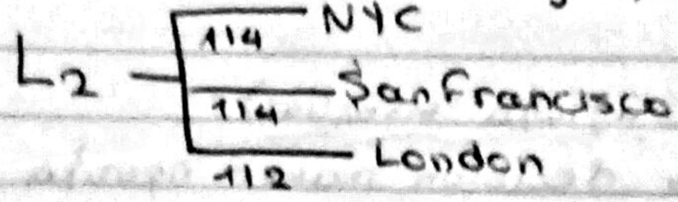
5] (σύνθεσης λοταρίας)

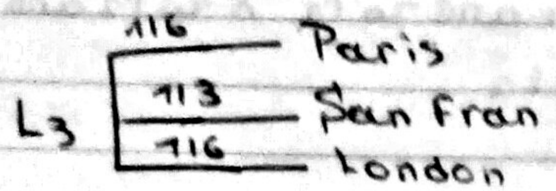
Θεώρησε όλα τα δυνατά αποτελέσματα μιας συνήθης λοταρίας L που δίνει πιθανότητα p_1 στην απολαβή r_1 τότε $L \, I \, L'$, όπου L' είναι η άλλη λοταρία $(p_1 r_1, \ldots p_n r_n)$

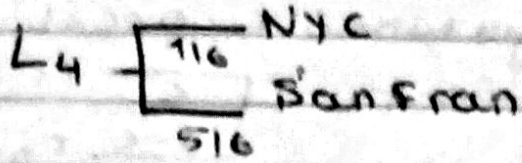
παράδειγμα 1

Κάποιος θέλει να ταξιδέψει και λέει σε μια λοταρία τις προτιμήσεις του για κάποιες χώρες, θέλουμε να τις κατατάξουμε.



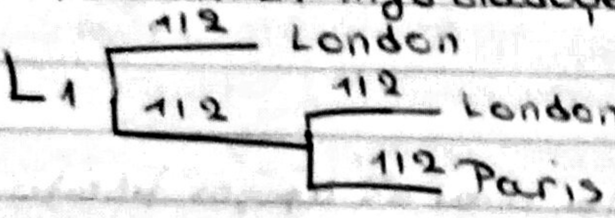




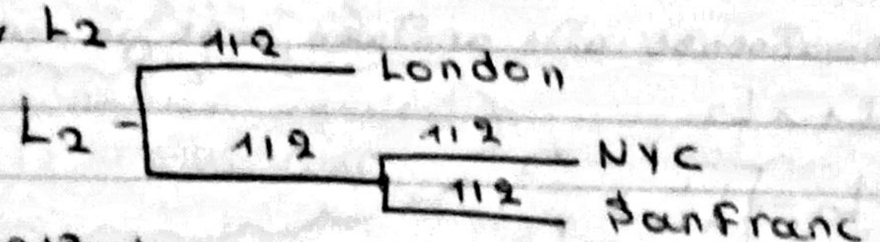


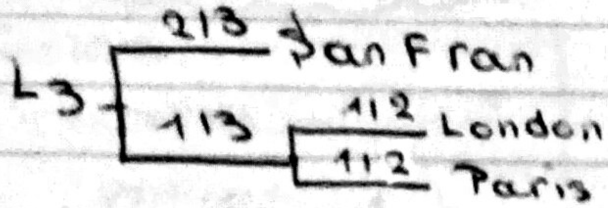
$L_1 P L_2$ τότε και $L_3 P L_4$

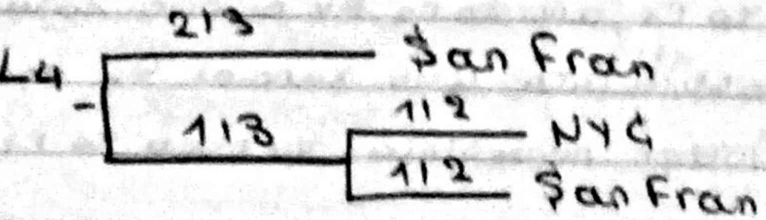
Γράφω την L_1 λίγο διαφορετικά



και την L_2







$\boxed{L_1 P L_2 \Rightarrow L_3 P L_4}$

∎

Λήμμα: Δοθείσης μιας utility συνάρτησης U(x)

Ορίζεται για οποιοδήποτε $a>0$ η οποιοδήποτε b την συνάρτηση $V(x) = aU(x)+b$. Έστω δύο οποιοσδήποτε λοταρίες L_1 ή L_2

1) Για έναν decision maker που χρησιμοποιεί την U(x) ως utility function ισχύει $L_1 p L_2$ αν-ν ο decision maker που χρησιμοποιεί την V(x) ως utility function ισχύει $L_1 p L_2$.

2) Για έναν decision maker που χρησιμοποιεί την U(x) ως utility function ισχύει $L_1 i L_2$ αν-ν ο decision maker που χρησιμοποιεί την V(x) ως utility function ισχύει $L_1 p L_2$

U (χειρότ επιθ αποτ) = 0

u (περισ επιθ αποτ) = 1

Εκτίμηση συνάρτησης χρησιμότητας

$u(-10.000) = 0$, $u(30.000) = 1$

$u(x_{1/2}) = 1/2$

$\rightarrow x_{1/2}$ — 1/2: 30.000 ; 1/2: -10.000

Ας πούμε ότι ο ενδιαφερόμενος λέει πως το $x_{1/2} = -3400$

$\rightarrow x_{3/4}$ — 1/2: $x_{1/2} = -3.400$; 1/2: -10.000

$u(x_{1/4}) = 1/4$

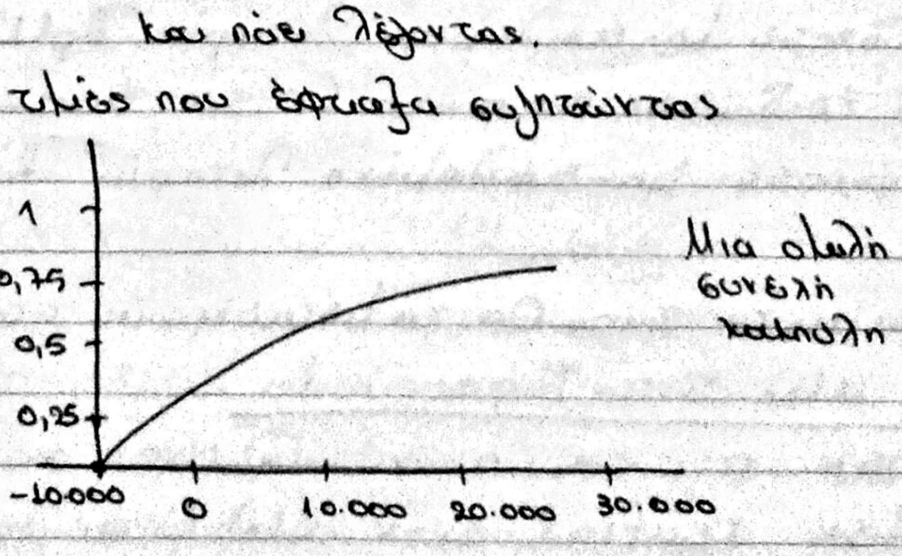
Ας πούμε ότι $x_{1/4} = -8000$

$u(x_{3/4}) = 3/4$

$x_{3/4} = 8000$ και πάει λέγοντας.

-Έστω ότι έχω τις τιμές που έφτιαξα συμπτύσσοντας

(-1000, 0)
(-3400, 0)
(-8000, 1/4)
(8000, 3/4)
(30.000, 1)



Ορισμός: (ισοδύναμο βεβαιότητας)
Το ισοδύναμο βεβαιότητας μιας λοταρίας είναι ο αριθμός $CE(L)$ που ο decision maker είναι αδιάφορος μεταξύ της λοταρίας ή του να λάβει μια συγκεκριμένη απολαβή $CE(L)$

Προσάρτηση επικινδυνότητας
προσάρτηση επικινδυνότητας μιας λοταρίας $R\rho(L)$ δίνεται $EU(L) - CE(L)$, όπου $EU(L)$ είναι η αναμενόμενη τιμή απολαβών της λοταρίας ($RP(L) = EU(L) - CE(L)$)

$$L \begin{cases} \xrightarrow{1/2} 30.000 \\ \xrightarrow{1/2} -10.000 \end{cases}$$

$EV(L) = 1/2 * 30.000 + 1/2(-10.000) = 10.000$
$CE(L) = -3.400$
$RP(L) = 10.000 - (-3.400) = 13400$

Έστω ότι έχουμε μια μη-εκφυλισμένη (περισσότερο από 1 αποτέλεσμα να συμβαίνουν) λοταρία.
Σε σχέση με την στάση που έχει ο decision maker ως προς το ρίσκο αυτός χαρακτηρίζεται ως:
1) επιφυλακτικός ως προς το ρίσκο (risk averse) αν-ν για οποιαδήποτε μη-εκφυλισμένη λοταρία $R\rho(L) > 0$
2) ουδέτερο ως προς το ρίσκο (risk neutral) αν-ν για οποιαδήποτε μη-εκφυλισμένη λοταρία $R\rho(L) = 0$
3) επιδιώκει το ρίσκο (risk seeking) αν-ν για οποιαδήποτε μη-εκφυλισμένη λοταρία $R\rho(L) < 0$

(όλα αυτά τώρα θα τα μεταφέρουμε στην συνάρτηση χρησ)

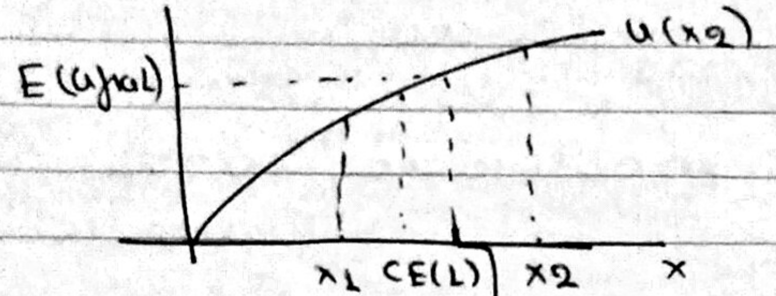
- Αν $u(x)$ είναι διαφορίσιμη
1) Risk averse αν-ν $u(x)$ είναι αυστηρά κοίλη
2) Risk neutral αν-ν $u(x)$ είναι γραμμική

3) Risk seeking αν-ν $u(x)$ αύξουσα κυρτή

- $U(x)$ αύξουσα κοίλη

$\to CE(L)$ L — p: x_1, $1-p$: x_2

$EV(L) = p x_1 + (1-p) x_2$ ← αναμενόμενη απολαβή



Όταν έχω κοίλη
$RP(L) = EV(L) - CE(L) > 0$
(αυτός που λαμβάνει απόφαση είναι επιφεπής ως προς το ρίσκο)

$p x_1 + (1-p) x_2 = EV(L)$
(κυρτός συνδυασμός των x_1, x_2)

Αν $EV(L) > CE(L)$ επί $U(x)$ κοίλη

$L_3 \to \underbrace{p x_1 + (1-p) x_2}_{EV(L)}$ $L_2 \to CE(L)$ L_1 — p: x_1, $1-p$: x_2

τρεις ισοδύναμες λοταρίες

Αφού $EV(L) > CE(L) \to p x_1 + (1-p) x_2 > CE(L)$

Άρα, μπορώ να χρησιμοποιήσω τη συν χρησιμότητας σχέση προτίμησης

$$\boxed{U(p x_1 + (1-p) x_2) > U(CE(L)) = p\,U(x_1) + (1-p)\,U(x_2)}$$

ορισμός κοίλης συν

παράδειγμα 2

Άτομο με συνάρτηση χρησιμότητας $\sqrt{x}$. $U(x) = x^{1/2}$ (κοίλη)
Το άτομο αυτό έχει 10.000 μετρητά και σπίτι αξίας 90.000. Πιθανότητα 0,01 να καταστραφεί το σπίτι του από πυρκαγιά ή άλλη αιτία. Πόσα χρήματα είναι διατεθειμένο το άτομο να δώσει ή οποία θα τον αποζημιώσει εξολοκλη-

ρου σε περίπτωση καταστροφής

Λύση

x είναι τα χρήματα που διαθέτει για ασφάλεια

L_1 (αγορά ασφάλειας) $\xrightarrow{1}$ $10.000 - x$

L_2 (όχι αγορά ασφαλ.) — 0,001 → 10 000 ; 0,999 → 100 000

$$L_1 \succ L_2 \quad 1(100.000 - x)^{1/2} > 0{,}001(10\,000)^{1/2} + 0{,}999 \cdot (100\,000)^{1/2}$$

$$x \leq 136{,}71$$

$$EV(L_2) = 0{,}001 \cdot 100.000 + 0{,}999 \cdot 100.000 = 99910$$

Λαμβάνει για απώλεια 90 € ανεμενόμενη.

$$E(u \text{ για } L_2) = 316{,}01$$

$$u(CE(L_2)) = 316{,}01$$

$$(CE(L_2))^{1/2} = 316{,}01 \Rightarrow CE(L_2) = 99863{,}24$$

$$RP(L_2) = EV(L_2) - CE(L_2) = 99910 - 99863{,}24 = 46{,}71$$

Επειδή είναι επιφυλακτικός είναι διατεθειμένος να δίνει 46,71 € παραπάνω για ασφάλεια.

Π